

**КАРАКЕНОВА САЯХАТ ГАБЛЕТОВНА**  
**Решение нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма методом параметризации**

**АННОТАЦИЯ**

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)  
по специальности «6D060100-Математика»

**Актуальность исследования** обусловлена с одной стороны, многочисленным приложением интегро-дифференциальных уравнений при решении задач естествознания и, с другой стороны, необходимостью развития новых конструктивных методов, способствующих эффективно определить разрешимость нелинейных задач для интегро-дифференциальных уравнений и найти их решения.

В. Вольтерра в начале прошлого столетия показал, что к интегро-дифференциальным уравнениям приводится задача о равновесии упругого твердого тела с учетом явления последействия. Возникновение интегро-дифференциальных уравнений при исследовании различных тенденций в области физики, химии, биологии, экономики и др. оказали большое влияние на их развитие и широкое применение. Краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений изучены в работах многих ученых, предложены методы решения и способы нахождения.

**Целью диссертационной работы** является создание эффективных методов нахождения решения и применение метода параметризации Д.С. Джумабаева к решению начальных и краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с нелинейной интегральной частью.

**Задачи исследования:**

а) Установление условия существования и единственности решения специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений с нелинейной интегральной частью;

б) Построение нового  $\Delta_N$  общего решения интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной интегральной частью и выявление его свойств;

с) Получение условий разрешимости нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма;

д) Построение  $\Delta_N$  общего решения для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и нахождение решения краевой задачи;

е) Установление условий разрешимости задачи Коши и краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма методом усреднения.

**Объектом исследования** являются начальные и краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с нелинейной интегральной частью.

**Предметом исследования** являются изучение вопросов разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с нелинейной интегральной частью методом параметризации, обоснование метода усреднения для начальных и краевых задач с малым числовым параметром.

**Научная новизна.**

1. Метод параметризации Д.С. Джумабаев применен к интегро-дифференциальному уравнению Фредгольма с нелинейной интегральной частью.

2. Установлены условия разрешимости специальной задачи Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.

3. Построено  $\Delta_N$  новое общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной интегральной частью.

4. Метод параметризации Д.С. Джумабаева был применен к краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.

5. Методом усреднения были решены начальные и краевые задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.

**Теоретическая и практическая значимость результатов.** Результаты диссертации носят, в основном, теоретический характер. Научная значимость работы заключается в создании конструктивного метода исследования и решения задач для интегро-дифференциальных уравнений с нелинейной интегральной частью.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 10 работ, в том числе 3 публикации в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе Scopus, 3 публикации в научных изданиях, входящих в перечень изданий, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 4 публикации в материалах международных конференций, в том числе 1 публикация в материалах зарубежных конференций.

– 3 статьи в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК:

1. Dzhumabaev D.S., **Karakenova S.G.** An iterative method for solving the special Cauchy problem for the system of nonlinear integral part // *Kazakh Mathematical Journal*. 19(2) 2019, pp. 49-58.

2. Kadirbayeva Zh.M, **Karakenova S.G.** Numerical solution of multi-point boundary value problems for essentially loaded ordinary differential equations// *Kazakh Mathematical Journal*. 20(4) 2020, pp. 47–57.

3. Stanzhitskii A.N., **Karakenova S.**, Zhumatov S.S. On a comparison theorem for stochastic integro-functional equations of neutral type// *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. Al-Farabi Kazakh National university. №1 (105), 2020, pp 30-45 (WoS, IF(2022)=0.1; JCI(2022) – Q4).

- 3 статьи в научных журналах, включенных в третий квартиль по данным Clarivate Analytics Journal Citation Reports и/или имеющих процентные показатели CiteScore соответственно 33, 35, 68 в базе данных Scopus:

1. Stanzhitskii A.N., **Karakenova S.G.**, Uteshova R.E. Averaging Method and Boundary Value Problems for Systems of Fredholm Integro-Differential Equations// Nonlinear Dynamics And Systems Theory. 20 (1) 2021, pp. 100-113. (Scopus, 38% in Category Mathematical Physics)
2. Assanova A.T., Zhumatov S.S., Mynbayeva S.T., **Karakenova S.G.** On solvability of boundary value problem for a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2022. – Vol. №1(105)/2022. – p. 25–34. DOI 10.31489/2022M1/25-34 (WoS, IF(2022)=0.6, JCI(2022) -Q3; Scopus, 35% in Category General Mathematics)
3. Assanova A.T., Mynbayeva S.T., **Karakenova S.G.**, Uteshova R.E. A solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Quaestiones Mathematicae. Published online: 09 Mar 2023. <https://doi.org/10.2989/16073606.2023.2183157> (WoS, Q3, IF(2022)=0.7, JCI(2022) –Q2; Scopus, 68% in Category Mathematics (miscellaneous))

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на международных и зарубежных научных конференциях и семинарах:

1. **Karakenova S.** On the solution of the special Cauchy problem for the system of nonlinear Fredholm integro-differential equations// Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. Алматы. 2019. Тезисы докладов. 3-5 апреля 2019г., стр.97-98.

2. **Karakenova S.G.** On solution to the special Cauchy problem for Fredholm integro-differential equations with nonlinear integral part// International Conference of Young Mathematician. 6-8 June 2019, p.30.

3. **Karakenova S.** Approximate method for solving special Cauchy problem for nonlinear integro-differential equation// Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. Алматы. 2020. Тезисы докладов. 3-5 апреля 2022г., стр. 121-122.

4. Mynbayeva S., **Karakenova S.** On one approach to general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation //Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. Алматы. 2020. Тезисы докладов. 4-8 апреля 2022г., стр. 149-150.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих мероприятиях:

1. Традиционная международная научная апрельская конференция. Институт математики и математического моделирования. Алматы, (3-5 апреля 2019г., 3-5 апреля 2020г., 5-8 апреля 2022г.);

2. Научный семинар кафедры Дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени аль-Фараби. Алматы, (февраль 2019г., апрель 2020г.);

3. International Conference of Young Mathematicians. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Ukraine, Kyiv, (June 6-8, 2019г.);

4. Семинар по Стохастическим дифференциальным уравнениям Киевского Национального университета им. Т.Г. Шевченко (июнь 2019 г.).

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов (первый раздел включает 3 подраздела, второй раздел – 3 подраздела, третий раздел – 2 подраздела), заключения, списка использованных источников из 132 работ.

**Введение** включает оценку современного состояния рассматриваемых задач, содержит обоснование необходимости проведения научно-исследовательских работ. Во введении изложены актуальность и новизна темы, основные цели и задачи исследования, предложенные к защите положения.

В диссертации исследуется краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной интегральной частью следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) f_k(\tau, x(\tau)) d\tau, t \in [0, T], x \in R^n, \quad (1)$$

$$g[x(0), x(T)] = 0. \quad (2)$$

**В первом разделе** рассматривается общая схема метода параметризации Д.С. Джумабаева для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной интегральной частью (1). Основная идея метода параметризации: интервал  $[0, T]$  делится на  $N$  частей по точкам  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$  и разбиение обозначается через  $\Delta_N$ . С помощью разбиения  $\Delta_N$  получаем систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений на внутренних интервалах. Далее вводятся дополнительные параметры  $\lambda_r \hat{=} x_r(t_{r-1})$  и осуществляется замена  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ ,  $t \in [t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, N}$ . Во внутренних интервалах получаем систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k(\tau, u_j(\tau) + \lambda_j) d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N} \quad (3)$$

и начальные условия

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Задача (3), (4) называется специальной задачей Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами.

Данная специальная задача Коши является основной вспомогательной задачей решения краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной интегральной частью. Установлены условия разрешимости и предложены пути решения задачи (3), (4).

Обоснован итерационный метод с демпфирующими множителями для решения специальной задачи Коши для системы нелинейных интегро-

дифференциальных уравнений с параметрами (3), (4) и приведены примеры описывающий итерационный процесс.

**Во втором разделе** рассмотрена краевая задача для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с нелинейной интегральной частью (1), (2). Построено  $\Delta_N$  общее решение интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с нелинейной интегральной частью и выявлены его свойства. Подставив  $\Delta_N$  общее решение в граничное условие и условия непрерывности, получим систему нелинейных алгебраических уравнений. В соответствии с условиями теоремы для выбранного разбиения  $\Delta_N$ , установлена разрешимость краевой задачи в терминах разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений.

Кроме того, рассмотрено квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, соответствующее уравнению (1). Основываясь на решение линейной части этого уравнения, было построено  $\Delta_N$  общее решение квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и найденное решение было применено к исследованию краевой задачи. Установлены условия разрешимости линейной краевой задачи для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.

**В третьем разделе** для решения краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с малым параметром применен метод усреднения. Данная задача сведена к краевой задаче для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследована краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Условия разрешимости рассматриваемой задачи установлены в термине разрешимости краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.